南山大学数学対策講座を受講する皆さんへ

このテキストを手にしている皆さんは，志高くここまで勉強を進めてきたと思います。その努力を，**南山大学に通用する力に仕上げるために必要なこと**とは？　…それをお話する前に，まずは皆さんは**「細やかな技術」**がきちんと身についていますか？　とくに高２までに数学の各分野のさまざまな問題を通じ，皆さんはさまざまな技術を磨いてきたはずです。もし不足している部分・分野があることを自覚した時には，速やかに技術を磨いておいてください。

さて，数学においてはよく「応用力がない」という声を耳にします。それはいわゆる「公式暗記型」でしか数学を勉強していない人がよく口にする気がします。「２次方程式が異なる２つの実数解をもつ」 ⇒ 「判別式$D>0$」といったように。数学で大切なのは「⇒」，いわゆる「プロセス」の部分です。そこに至る「背景」「理由」ですね。それを理解した上で「⇒」をショートカットする分には全くかまいませんが。皆さんはちゃんとそれを自覚していますか？

そして，「応用力」とはまさに**「プロセス力」**と言えましょう。問題を見たとき，その問題が語っていることをその字面の奥に潜む部分まで読み込み，どこに自分の手で解決しなければならない「壁」があるのかを考えるわけです。さらに「壁」を越えるために何が必要か。それはこの「⇒」に隠されています。そうです，それを選択すべき「理由」があるのです。はたまた，時には形の美しさといった，数学の枠を越えた部分にヒントが隠されていることもあるでしょう。それを見抜き，立式し，磨いた技術を以て計算し答案として仕上げていくのです。

このテキストには，この**「プロセス力」を養うために必要な問題が厳選**されています。後述しますが，このテキストの使い方に従い，画面を通じて伝わってくるものを目で，耳で，肌で吸収し，自分のものとするための**復習を実践**すれば（ここ大事！），無限に広がる数学の世界の扉は確実に開かれます。今日の講義から何が皆さんに伝わったのか。それを反芻し，他の異なる場面においても**「考える」癖をつける**。それこそが，南山大学に通用する力となりましょう。

そうです。**「この講座だけでいい」わけではありません**。「傾向と対策」というものは，大学入試には存在しません。「たまたま」出ることが多かった分野に絞って勉強することはリスクが高すぎます。扉を開いた後は，自ら歩んでいくことです。扉が開かれているのにその先に進まない人はいないでしょう。なぜならば，その先に皆さんが目指す「南山大学」があるのですから。ぜひ，大学の過去問や入試問題集に進んでください。

この講座を見るたびに，さまざまな「開かずの扉」が音を立てて開くでしょう。決してテクニカルなことは要求しません。必要なのは，磨いてきたはずの**技術**，そしてその技術を活かすべく**謙虚な姿勢**でこの講座を見る，そして合格したいという**気持ち**です。その気持ちで講義を聞き，もし感動することがあっても，感動したという事実だけでその日を終わらないでください。せっかく開いた扉も，時間がたてば自動的に閉まりますよ。**真に感動すべきは，自分で「未知なる道」を切り開いた時**です。その感動をかみしめながら，一歩，また一歩，南山大学を目指して前進しましょう。何かを見失った時，私は，指南役としていつもあなたのそばに現れます。

山内　恵介

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜南山大数学対策講座　目次＞

第１講　全学統一入試
第２講　小問集合
第３講　図形と方程式，微分法・積分法
第４講　数列，ベクトル
第５講　微分法・積分法（数学Ⅲ），複素数平面

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」３問で形成されています。まずは何も見ないでノートに解いてみましょう。自分が問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります。

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません。掲載されている問題は南山大学の入試に出題されたものを中心に構成されていますから，最後まで解けないことも多いかもしれません。それでも，いろんな可能性を追ってみましょう。

ちなみに１問にかけてよい時間はおよそ20分です。もちろん，このまま続ければ(おそらく）最後まで答えに行き着く！　というところまで行っている場合は，30分まではかけて結構です。３問でおよそ１時間から１時間半。数学に本気で向き合う時間です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で講義を受けて，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。問題が掲載されているページはすべて見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。 それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。講義時間は限られていますから，先生は全てを黒板に書くことはしていません。よって，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見ませんよ。あくまで「Note」＝「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でいいのです。

ちなみにここまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありません。ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。皆さんに残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう。大枠をとらえた上で，細かいとこ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ろに後からこだわる姿勢も大事です。

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題を見て，もう一度頭に描いてみましょう。もし思い出せない場面があったらノートや「Note」欄を見てみましょう。そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を解いてみましょう。予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述していきましょう。もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などで途中で止まってしまうかもしれません。また，あなたの想いをどう記述で表現していいかわからない場合もあるかもしれません。安心してください。すべての問題に「模範解答」がついています。必要に応じ，画面を見る，またはプリントアウトして参考にしてください。

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，答案を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です。こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう。

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います。そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となりましょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講２～３題ずつ用意してあります。講義問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度もさまざまです。解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。解答にはワンポイントのコメントもついています。この「練習問題」もまた，皆さんの成長のために厳選した問題です。より理解を深めていただきたく思います。

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に至ることができます。それはもしかしたら自分の力だけで到達したかもしれない領域です。しかしながら，もしそうであったとしても，そこに至る確実性の高いものがあるとしたら，それを選択することによって浮いた時間や労力をほかの学習に回すことができるでしょう。この講義がそういう目的をかなえるための存在であること，それは繰り返しますがサイクルを確実に構築した人だけがわかることです。皆さんの日々の努力，期待しています。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　全学統一入試

1 ［1］ (1) 実数 a に対して，3 次方程式 $x^3+ax^2-ax-1=0$ は実数解をただ 1 つだけもつとする．この方程式の実数解は $x=$ ア であり，a のとりうる値の範囲を求めると イ である．

(2) a，b，p を実数とする．x の方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ の解のうち 2 つが $-p-2i$ と p であるとき，p の値を求めると $p=$ ウ である．また，a と b の値を求めると $(a,\ b)=$ エ である．

［2］ 3 つのサイコロを同時に投げるとき，出た目の最大値が 6 となる確率は オ であり，出た目の最小値と最大値の組が (1，6) となる確率は カ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上の曲線 C：$y=-x^3+x+6$ を考える．

(1)　C 上の点 $(2,\ 0)$ を通る C の接線をすべて求めよ．

(2)　$a>0$ とする．点 $(a,\ 0)$ を通る C の接線の本数を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 原点を O とする座標平面上に 2 点 A(3, 2), B(−1, 5) をとる．線分 AB を $s:1-s$ $(0<s<1)$ の比に内分する点を C とする．また，平面上の 2 点 P, Q が，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(0<t<1)$ を満たしているとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ の成分を s と t で表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ が成り立つとき，s を t で表せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ が成り立つとき，s と t の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　全学統一入試

[1]　a は実数とする．x の方程式 $x^3+x^2+ax-a-2=0$ は a の値によらない実数解をもち，その実数解は $x=$ ア である．また，この方程式が虚部が 2 の虚数解をもつとき，a の値を求めると $a=$ イ である．

[2]　曲線 $C : y=x^3-3x$ に対し，点 A$(3,\ a)$ から 3 本の接線が引けるとき，a の値の範囲は $-$ ウ $<a<$ エオ である．

[3]　座標平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(2,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ がある．AB を $t : (1-t)$ に内分する点を C，AB を $(1-t) : t$ に内分する点を D とする．ただし，$0<t<\frac{1}{2}$ である．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を成分で表すと $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=($ カ $t,$ キ $-t)$，

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=($ ク $t-2,\quad 1-$ ケ $t)$ である．△OCD が直角三角形になるとき

$t=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ のとき $t=\dfrac{9-\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{15}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　小問集合

1 [1]　方程式 $|3x-2|+x-5=1$ を解くと $x=$ **ア** である．また，不等式 $2x^2-4>|x-1|$ を解くと **イ** である．

[2]　放物線 $y=kx^2-2kx-2$ の頂点の y 座標が負の値をとるとき，実数 k の値の範囲は **ウ** である．さらに，この放物線が，関数 $y=-|x|$ のグラフとただ1つの共有点を持つとき，k の値は **エ** である．

[3]　2つの関数 $f(x)=x^2+4x+4$，$g(x)=-2x^2+4x+k$ がある．すべての x について $f(x)>g(x)$ となる実数 k の値の範囲は **オ** であり，すべての x_1，x_2 の組について $f(x_1)>g(x_2)$ となる k の値の範囲は **カ** である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=4$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\sin\theta\cos\theta=$ **ア** であり，

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=$ **イ** である．

[2]　$0<a<1$ のとき，x についての方程式

$$\log_2(8ax-1)+\frac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}+1=\log_2 2a$$

の解を a で表すと $x=$ **ウ** である．また，この解を最小にする a の値を求めると $a=$ **エ** である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　△ABC において，AB＝12，AC＝10，∠A＝60° であるとき，△ABC の外接円の半径 R を求めると R＝ ア である．また，頂点 B から対辺 AC に引いた垂線と AC との交点を D，頂点 C から対辺 AB に引いた垂線と AB との交点を E とし，垂線 BD と CE の交点を F とする．このとき，線分 CF と FE の長さの比を求めると，CF：FE＝ イ である．

[2]　1 個のサイコロを投げるという試行をくり返す反復試行を考える．2 回目以降の試行で「直前に投げて出た目よりも大きい目が出ること」が 2 回連続したら，反復試行を終了する．ちょうど 3 回目の試行で反復試行が終了する確率を求めると ウ であり，ちょうど 4 回目の試行で反復試行が終了する確率を求めると エ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　小問集合

［1］　a を実数の定数とし，２つの関数 $f(x)=x^2-(a-2)x+2$，$g(x)=-x^2+2x+a-2$ がある．すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$ が成り立つような a の値の範囲は $-\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}<a<-\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，すべての実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つような a の値の範囲は $-\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}<a<\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である．

［2］　θ の範囲を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．$a=\sin 2\theta$ とするとき，a を用いて $\sin\theta+\cos\theta$ を表すと $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{1+\boxed{\text{カ}}}$ である．また，$\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=4$ のとき，$\sin\theta+\cos\theta$ の値を求めると $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{キ}}+\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{4}$ である．

［3］　$\triangle$ABC において AB＝5，BC＝6，CA＝3 とするとき，$\cos B=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ であり，A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とすると，AH＝$\dfrac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

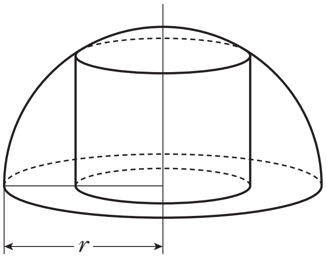
＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　図形と方程式，微分法・積分法

1 ［1］ r を正の実数とする．円 $x^2+(y-1)^2=r^2$ と放物線 $y=x^2$ が $x>0$ の範囲に異なる２つの交点 P，Q をもつような r の値の範囲は **ア** である．さらに，この r の範囲で $\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ が成り立つ r の値は $r=$ **イ** である．

［2］ 図のように半径 r の半球面に円柱が内接している．円柱の体積が最大になるのは円柱の高さが **ウ** のときであり，その円柱の体積は **エ** である．



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面上に 3 つの放物線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=bx^2$ $(0<b<1)$ および C_3 がある．C_3 は C_2 上の点 $(1,\ b)$ を頂点とし，点 $(0,\ b-1)$ を通り，上に凸である．また，C_1 と C_3 は，ただ 1 つの共有点 A をもち，A を通る共通の接線 ℓ をもつ．

(1)　b の値と C_3 の方程式を求めよ．

(2)　A の座標と ℓ の方程式を求めよ．

(3)　C_1，ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を S とし，C_3，ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を T とする．$S=T$ が成り立つことを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　座標平面上に放物線 $D: y=\frac{1}{2}x^2+x+2$ と D 上の点 $\mathrm{P}(-2,\ 2)$ がある．また，P における D の接線を ℓ とする．

(1)　ℓ の方程式を求めよ．

(2)　円 C は，半径が r で中心が $(r,\ 2)$ であり，直線 ℓ と接しているとする．C と ℓ との接点 A の x 座標を a とするとき，A を通り ℓ と垂直に交わる直線の方程式を a で表せ．また，その直線が C の中心を通ることを用いて r を a で表せ．

(3)　(2)の r の値を求めよ．

(4)　(2)の C の外側で D と C と ℓ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　図形と方程式，微分法・積分法

［1］　展開図が円と半径 ℓ の扇形からなる直円錐を考える．ℓ が一定のとき，この円錐の体積を最大にするような円錐の高さを ℓ で表すと $\dfrac{\ell}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}$ であり，扇形の中心角は $120\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ 度である．

［2］　座標平面上に曲線 $C: y=-x^2+1$ と点 $\mathrm{P}(a,\ 3a^2+1)$ がある．ただし，$a>0$ とする．P を通る C の2本の接線のうち，C との接点の x 座標が小さい方を ℓ_1 とし，C と ℓ_1 の接点を Q とする．また，ℓ_1 と Q で垂直に交わる直線を ℓ_2 とする．C と ℓ_1 と直線 $x=a$ で囲まれる部分の面積を S_1，C と ℓ_2 と直線 $x=a$ で囲まれる部分の面積を S_2 とするとき，$S_2=2S_1$ が成り立つ a の値は $a=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　数列，ベクトル

1 ［1］　2つの自然数 m，n が $m<n$ を満たすとき，m から n までのすべての自然数の和 S を m と n で表すと $S=$ **ア** である．このとき，$S=808$ となる m と n の組は $(m,\ n)=$ **イ** である．

［2］　平面上に正方形ABCDと点Eがある．ただし，Eは正方形ABCDの外部にあり，EA＝EB＝ABを満たす．また，ABとECの交点をFとする．$\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{EB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ それぞれを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表すと，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=$ **ウ**，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=$ **エ** である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 初項が２である数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ の初項から第 n 項までの和 S_n について，$S_{n+1}-2S_n=n^2-n+2$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ が成り立っている．

(1) S_2 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ であるとき，S_n-2S_{n-1} を n の式で表せ．

(3) $a_{n+1}-2a_n$ を n の式で表せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 Oを原点とする座標空間に四面体OABCがある．3点A，B，Cの座標は $A(\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$B(0,\ \sqrt{3},\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 2)$ である．また，A，B，Cを通る平面上に点Pがあり，実数 s，t に対して，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす．

(1) Pの座標を s，t で表せ．

(2) $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AC}$ のとき，s，t を求めよ．

(3) △ABCの面積を求めよ．

(4) (2)のとき，直線APと直線BCの交点をHとする．$|\overrightarrow{AH}|$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　数列，ベクトル

[1]　原点をＯとする座標空間に３点 A(1，0，0)，B(0，2，0)，C(0，0，3) がある．

△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．また，A，B，C の定める平面を α とするとき，Ｏから α に下ろした垂線と α との交点Ｈの座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{49},\ \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{49},\ \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{49}\right)$ である．

[2]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2a_n+n^2-n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとする．$a_1=\boxed{\text{ケ}}$，$a_2=-\boxed{\text{コ}}$ である．また $a_{n+1}-2a_n=-\boxed{\text{サ}}\,n$ と表され，この式を変形すると

$a_{n+1}-\boxed{\text{シ}}(n+1)-\boxed{\text{ス}}=2(a_n-\boxed{\text{シ}}\,n-\boxed{\text{ス}})$ となる．

$b_n=a_n-\boxed{\text{シ}}\,n-\boxed{\text{ス}}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\boxed{\text{セソ}}$，公比２の等比数列となる．したがって，$a_n=\boxed{\text{シ}}\,n-\boxed{\text{ス}}-2^{n+\boxed{\text{タ}}}$ と表される．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法・積分法（数学Ⅲ），複素数平面

1 [1]　関数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ を微分すると，$f'(x)=$ **ア** であり，$f(x)=-f'(x)$ を満たす x の値は **イ** である．

[2]　曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ e^t)$ における接線 ℓ と法線 m が x 軸と交わる点をそれぞれ B, C とする．法線 m の方程式は **ウ** であり，△ABC の面積が 5 のとき，△ABC の外心の座標は **エ** である．

[3]　複素数 z は $z=\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi$ であるとする．$z^7=$ **オ** であり，$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z=$ **カ** である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　正の実数 k について，関数 $f(x)=e^{-kx}+x$ がある．$f'(x)=0$ を満たす x は k の関数であり，この関数を $g(k)$ とする．

(1)　$g(k)$ を求めよ．

(2)　$g(k)$ の最大値 x_0 と，そのときの k の値 k_0 を求めよ．

(3)　$k=k_0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=x_0$，$x=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

[2]　関数 $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{6}x-\dfrac{1}{2}$ を考える．

(1)　$f(1)$ を求めよ．

(2)　導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(0)$ を計算せよ．

(3)　$0<x\leqq 3$ のとき，$f'(x)>0$ が成り立つことを示せ．

(4)　曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x<3)$ と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　座標平面で，曲線 $y=e^x$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=1$ とで囲まれた部分を D とする．

(1)　D を座標平面に図示せよ．

(2)　D を x 軸のまわりに１回転させてできる回転体の体積 V_0 を求めよ．

(3)　D を直線 $y=1$ のまわりに１回転させてできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　微分法・積分法(数学Ⅲ)，複素数平面

[1]　関数 $f(x)=(\log x)^2-\log\left(\frac{1}{x}\right)^2$ を微分すると，$f'(x)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{x}(\log x+\boxed{\text{イ}})$ であり，$f(x)-xf'(x)=0$ を満たす x の値は $x=e^{\pm\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}$ である．

[2]　複素数 $z=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$ について，$z^5=\boxed{\text{エ}}$，$z^4+z^3+z^2+z+1=\boxed{\text{オ}}$ である．

[3]　a を実数として，関数 $f(x)=a\cos x-\frac{\cos x}{1+\sin x}\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ を考える．

(1)　$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$ となる a の値は $a=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．また，このとき $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{3}$ である．

(2)　a の値を(1)のように定めるとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 S は $S=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}-\log\boxed{\text{サ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　全学統一入試

1	[1] (1) 実数 a に対して，3 次方程式 $x^3+ax^2-ax-1=0$ は実数解をただ 1 つだけもつとする．この方程式の実数解は $x=$ **ア** であり，a のとりうる値の範囲を求めると **イ** である． (2) a，b，p を実数とする．x の方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ の解のうち 2 つが $-p-2i$ と p であるとき，p の値を求めると $p=$ **ウ** である．また，a と b の値を求めると $(a,\ b)=$ **エ** である．

(1)　$x^3+ax^2-ax-1=0$　……①　より

$$(x-1)\{x^2+(a+1)x+1\}=0$$

よって方程式①は実数解 $x=\mathbf{1}$ をもつ．　……ア

したがって①が実数解をただ 1 つだけもつのは，x の 2 次方程式

$$x^2+(a+1)x+1=0 \quad \cdots\cdots②$$

が $x=1$ 以外の実数解をもたないときである．

②が $x=1$ を解にもつとき

$$1+(a+1)\cdot 1+1=0 \qquad a=-3$$

このとき②は，

$$x^2-2x+1=0 \qquad (x-1)^2=0$$

より，重解 $x=1$ をもち適する．

②が実数解をもたないとき，この方程式の判別式を D とすると

$$D=(a+1)^2-4<0$$

$$-2<a+1<2$$

$$-3<a<1$$

以上より，求める a の範囲は，$\boldsymbol{-3\leqq a<1}$　……イ

(2)　実数係数の 3 次方程式　$x^3-x^2+ax+b=0$ が $-p-2i$（p は実数）を解にもつとき，$-p+2i$ も解にもつ．またもう一方の解は p である．

よって，解と係数の関係より，

$$\begin{cases}(-p+2i)+(-p-2i)+p=1 & \cdots\cdots①\\ (-p+2i)(-p-2i)+(-p-2i)p+p(-p+2i)=a & \cdots\cdots②\\ (-p+2i)(-p-2i)p=-b & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①より　$p=\mathbf{-1}$　……ウ

このとき②より，

$$a=(1+2i)(1-2i)-(1-2i)-(1+2i)=3$$

③より，$b=(1+2i)(1-2i)=5$

したがって，$(a,\ b)=\mathbf{(3,\ 5)}$　……エ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 ［2］ 3つのサイコロを同時に投げるとき，出た目の最大値が6となる確率は オ であり，出た目の最小値と最大値の組が(1，6)となる確率は カ である．

3つのサイコロを同時に投げるとき，目の出方の場合の数は

$6^3=216$（通り）

出た目の最大値が6となることの余事象は，3つとも1～5のいずれかが出る場合である．

よって出た目の最大値が6となる確率は

$$1-\frac{5^3}{6^3}=1-\frac{125}{216}=\mathbf{\frac{91}{216}}$$ ……オ

出た目の最小値が1，最大値が6となるのは，3つのサイコロの目が次の通り

① 1，1，6　② 1，6，6　③ 1，6，2から5のいずれか

①のとき，3つの目がどのサイコロの出目かについて

$$\frac{3!}{2!}=3$$（通り）

②も同様3通り

③のとき，$4\times3!=24$（通り）

以上より，求める確率は，

$$\frac{3+3+24}{6^3}=\frac{30}{6^3}=\mathbf{\frac{5}{36}}$$ ……カ

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

> **2** 座標平面上の曲線 $C: y=-x^3+x+6$ を考える．
> (1) C 上の点 $(2,\ 0)$ を通る C の接線をすべて求めよ．
> (2) $a>0$ とする．点 $(a,\ 0)$ を通る C の接線の本数を求めよ．

(1) $C: y=-x^3+x+6$　より　$y'=-3x^2+1$

C 上の点 $(t,\ -t^3+t+6)$ における C の接線は，

$$y=(-3t^2+1)(x-t)-t^3+t+6$$

つまり

$$y=(-3t^2+1)x+2t^3+6 \quad \cdots\cdots ①$$

①が $(2,\ 0)$ を通るとき，

$$0=(-3t^2+1)\cdot 2+2t^3+6$$
$$t^3-3t^2+4=0$$
$$(t-2)(t^2-t-2)=0$$
$$(t-2)^2(t+1)=0$$
$$t=2,\ -1$$

したがって求める接線の式は①より，

$$\boldsymbol{y=-11x+22,\ y=-2x+4}$$

(2) ①が $(a,\ 0)$ を通るとき

$$0=(-3t^2+1)\cdot a+2t^3+6$$
$$2t^3-3at^2+a+6=0 \quad \cdots\cdots ②$$

3 次関数は接点が異なれば接線も異なるので，t の 3 次方程式②の異なる実数解の個数が求める接線の本数に等しい．

$f(t)=2t^3-3at^2+a+6$　とおくと　$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$

$a>0$ より，$f(t)$ の増減表は右図

t	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	+	0	−	0	+
$f(t)$	↗		↘		↗

$$f(0)=a+6$$
$$f(a)=-a^3+a+6=-(a-2)(a^2+2a+3)$$

$a^2+2a+3=(a+1)^2+2>0$ より，

$f(a)$ の正負は $-(a-2)=-a+2$ の正負と一致する．

よって②の異なる実数解の個数は

$f(0)\cdot f(a)<0$　つまり　$(a+6)(a-2)>0$　より　$a<-6,\ 2<a$ のとき 3 個

$f(0)\cdot f(a)=0$　つまり　$a=-6,\ 2$ のとき 2 個

$f(0)\cdot f(a)>0$　つまり　$-6<a<2$ のとき 1 個

$a>0$ であることより，求める接線の本数は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a>2} \textbf{ のとき　3 本} \\ \boldsymbol{a=2} \textbf{ のとき　2 本} \\ \boldsymbol{0<a<2} \textbf{ のとき 1 本} \end{cases}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　原点を O とする座標平面上に 2 点 A(3, 2), B(−1, 5) をとる．線分 AB を $s:1-s$ $(0<s<1)$ の比に内分する点を C とする．また，平面上の 2 点 P，Q が，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OA}$ $(0<t<1)$ を満たしているとする．

(1) $\overrightarrow{CP}$ の成分を s と t で表せ．

(2) $|\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{AP}|$ が成り立つとき，s を t で表せ．

(3) $|\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{AP}|$ と $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CQ}$ が成り立つとき，s と t の値を求めよ．

(1) $\overrightarrow{OA}=(3,\ 2)$　　$\overrightarrow{OB}=(-1,\ 5)$

$\overrightarrow{OC}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}=(1-s)(3,\ 2)+s(-1,\ 5)=(3-4s,\ 2+3s)$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=(3,\ 2)+t(-1,\ 5)=(3-t,\ 2+5t)$

よって　$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{(4s-t,\ -3s+5t)}$

(2) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(-t,\ 5t)$

$|\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{AP}|$　より　$|\overrightarrow{CP}|^2=|\overrightarrow{AP}|^2$

$(4s-t)^2+(-3s+5t)^2=(-t)^2+(5t)^2$

$25s^2-38st=0$

$s\neq0$ より　$25s-38t=0$

よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{38}{25}t}$　……①

(3) $\overrightarrow{AB}=(-4,\ 3)$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OA}=(-1,\ 5)+t(3,\ 2)=(3t-1,\ 2t+5)$ より

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC}=(4s+3t-4,\ -3s+2t+3)$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CQ}$ より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$

$-4(4s+3t-4)+3(-3s+2t+3)=0$

$25s+6t=25$　……②

①，②より　$\boldsymbol{s=\dfrac{19}{22},\ t=\dfrac{25}{44}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　小問集合

> 1 ［1］ 方程式 $|3x-2|+x-5=1$ を解くと $x=$ [ア] である．また，不等式
> $2x^2-4>|x-1|$ を解くと [イ] である．

$|3x-2|+x-5=1$ について，

$x \geqq \frac{2}{3}$ のとき

$3x-2+x-5=1$　　$x=2$（$x \geqq \frac{2}{3}$ を満たす）

$x<\frac{2}{3}$ のとき

$-3x+2+x-5=1$　　$x=-2$（$x<\frac{2}{3}$ を満たす）

よって，$\boldsymbol{x=-2,\ 2}$　……ア

$2x^2-4>|x-1|$ について，

$x \geqq 1$ のとき

$2x^2-4>x-1$

$2x^2-x-3>0$

$(x+1)(2x-3)>0$

$x<-1,\ \frac{3}{2}<x$

$x \geqq 1$　より　$\frac{3}{2}<x$

$x<1$ のとき

$2x^2-4>-x+1$

$2x^2+x-5>0$

$x<\frac{-1-\sqrt{41}}{4},\ \frac{-1+\sqrt{41}}{4}<x$

$x<1$ より　$x<\frac{-1-\sqrt{41}}{4}$

よって　$\boldsymbol{x<\frac{-1-\sqrt{41}}{4},\ \frac{3}{2}<x}$　……イ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 [2]　放物線 $y=kx^2-2kx-2$ の頂点の y 座標が負の値をとるとき，実数 k の値の範囲は **ウ** である．さらに，この放物線が，関数 $y=-|x|$ のグラフとただ１つの共有点を持つとき，k の値は **エ** である．

$y=kx^2-2kx-2$ ……① は放物線を表す式であることより　$k\neq 0$

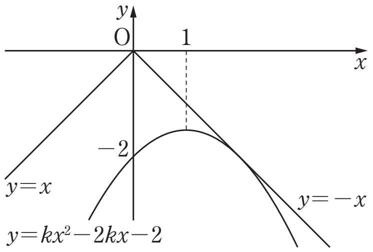
$y=kx^2-2kx-2=k(x-1)^2-k-2$ より頂点の座標は　$(1,\ -k-2)$

よって　$-k-2<0$　より　$k>-2$

$k\neq 0$ を考慮して，①の頂点の y 座標が負の値をとるのは　$\boldsymbol{-2<k<0,\ 0<k}$　……ウ

また，①の軸は $x=1$，y 切片は -2

よって①のグラフと $y=-|x|$ のグラフがただ１つの共有点をもつのは，右図より $k<0$ かつ ①と $y=-x$ のグラフが１つの共有点をもつときである．



$kx^2-2kx-2=-x$

$kx^2+(-2k+1)x-2=0$

この方程式の判別式を D とすると

$D=(-2k+1)^2-4\cdot k\cdot(-2)=0$

$4k^2+4k+1=0$

$(2k+1)^2=0$

したがって　$\boldsymbol{k=-\frac{1}{2}}$　……エ　（$k<0$ を満たす）

1 [3]　２つの関数 $f(x)=x^2+4x+4$，$g(x)=-2x^2+4x+k$ がある．すべての x について $f(x)>g(x)$ となる実数 k の値の範囲は **オ** であり，すべての x_1，x_2 の組について $f(x_1)>g(x_2)$ となる k の値の範囲は **カ** である．

$f(x)>g(x)$ より

$x^2+4x+4>-2x^2+4x+k$

$3x^2+4-k>0$

これがすべての実数 x で成り立つのは，$3x^2+4-k=0$ の判別式 D について $D<0$ のとき．

よって，$0^2-3\cdot(4-k)<0$　より　$\boldsymbol{k<4}$　……オ

また，すべての実数 x_1，x_2 において $f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つのは，$f(x)$ の最小値が $g(x)$ の最大値より大きいときである．

$f(x)=(x+2)^2$ の最小値は 0

$g(x)=-2(x-1)^2+2+k$ の最大値は $2+k$

よって　$0>2+k$　より　$\boldsymbol{k<-2}$　……カ

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=4$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\sin\theta\cos\theta=$ **ア** であり，$\sin^3\theta+\cos^3\theta=$ **イ** である．

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=4$ より

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=4\sin\theta\cos\theta$$

よって　$1=4\sin\theta\cos\theta$ より

$$\sin\theta\cos\theta=\mathbf{\frac{1}{4}} \quad \cdots\cdots ア$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$

よって　$\sin\theta+\cos\theta>0$ より

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

ゆえに

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\mathbf{\frac{3\sqrt{6}}{8}} \quad \cdots\cdots イ$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［2］ $0<a<1$ のとき，x についての方程式

$$\log_2(8ax-1)+\frac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}+1=\log_2 2a$$

の解を a で表すと $x=$ ウ である．また，この解を最小にする a の値を求めると $a=$ エ である．

真数が正であることより　$8ax-1>0$　かつ　$x-a>0$

$a>0$　より　$x>\frac{1}{8a}$　かつ　$x>a$　……①

このとき　$\log_2(8ax-1)+\frac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}+1=\log_2 2a$　より

$\log_2(8ax-1)+\log_2(x-a)+1=1+\log_2 a$

$\log_2(8ax-1)(x-a)=\log_2 a$

よって

$(8ax-1)(x-a)=a$

$8ax^2-(8a^2+1)x=0$

$x\{8ax-(8a^2+1)\}=0$

$a>0$ より，①から　$x>0$

よって，$x=\frac{8a^2+1}{8a}=\boldsymbol{a+\frac{1}{8a}}$　……ウ（①を満たす）

また $a>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$x=a+\frac{1}{8a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{8a}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

等号成立は，$a=\frac{1}{8a}$　$a^2=\frac{1}{8}$　つまり　$a=\frac{\sqrt{2}}{4}$　$(a>0)$ のとき

したがって解を最小にする a の値は　$a=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}$　……エ

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　△ABC において，AB＝12，AC＝10，∠A＝60° であるとき，△ABC の外接円の半径 R を求めると R＝ **ア** である．また，頂点 B から対辺 AC に引いた垂線と AC との交点を D，頂点 C から対辺 AB に引いた垂線と AB との交点を E とし，垂線 BD と CE の交点を F とする．このとき，線分 CF と FE の長さの比を求めると，CF：FE＝ **イ** である．

△ABC で余弦定理より

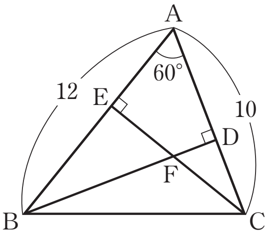
$$BC^2=144+100-2\cdot12\cdot10\cdot\cos60^\circ=124$$

$$BC=2\sqrt{31}$$

△ABCで正弦定理より　$2R=\dfrac{BC}{\sin 60^\circ}$

よって　$R=\dfrac{2\sqrt{31}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{93}}{3}}$　……ア

また，直角三角形 ABD において



$$AD=AB\cos60^\circ=12\times\frac{1}{2}=6$$

よって　CD＝4

直角三角形 ACE において

$$AE=AC\cos60^\circ=10\times\frac{1}{2}=5$$

よって　BE＝7

したがって，メネラウスの定理より

$$\frac{AB}{BE}\times\frac{EF}{FC}\times\frac{CD}{DA}=1$$

つまり

$$\frac{12}{7}\times\frac{EF}{FC}\times\frac{4}{6}=1$$

$$\frac{EF}{FC}=\frac{7}{8}$$

したがって，CF：FE＝**8：7**　……イ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［2］ 1個のサイコロを投げるという試行をくり返す反復試行を考える．2回目以降の試行で「直前に投げて出た目よりも大きい目が出ること」が2回連続したら，反復試行を終了する．ちょうど3回目の試行で反復試行が終了する確率を求めると［ウ］であり，ちょうど4回目の試行で反復試行が終了する確率を求めると［エ］である．

ちょうど3回目の試行で終了するのは

(1回目の出目)＜(2回目の出目)＜(3回目の出目) のとき

その場合の数は，1～6から異なる3つを選んで，小さい順に1回目，2回目，3回目の出目としたときで，${}_6C_3$ 通り．

よって，その確率は $\dfrac{{}_6C_3}{6^3}=\dfrac{5\cdot 4}{6\cdot 6\cdot 6}=\mathbf{\dfrac{5}{54}}$ ……ウ

また，4回目の試行で終了するのは，必ず4回振ると考えると

(2回目の出目)＜(3回目の出目)＜(4回目の出目)　かつ

(1回目の出目)＜(2回目の出目)＜(3回目の出目)＜(4回目の出目) ではない

場合である．

その確率は $\dfrac{6\times{}_6C_3}{6^4}-\dfrac{{}_6C_4}{6^4}=\dfrac{5}{54}-\dfrac{5}{432}=\mathbf{\dfrac{35}{432}}$ ……エ

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　図形と方程式，微分法・積分法

1 ［1］ r を正の実数とする．円 $x^2+(y-1)^2=r^2$ と放物線 $y=x^2$ が $x>0$ の範囲に異なる２つの交点P，Qをもつような r の値の範囲は **ア** である．さらに，この r の範囲で $\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ が成り立つ r の値は $r=$ **イ** である．

放物線 $y=x^2$ の軸は y 軸であり，円の中心も y 軸上にある．

$x^2+(y-1)^2=r^2$ と $y=x^2$ より

$y+(y-1)^2=r^2$　　$y^2-y+1-r^2=0$ ……①

図形の対称性より，この y の２次方程式①が正の実数解をもてば，その解１つにつき，x 座標が正である交点と負である交点が１つずつ存在する．

よって $x>0$ に異なる２つの交点P，Qをもつのは，方程式①が異なる２つの正の実数解をもつときである．

$f(y)=y^2-y+1-r^2=\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}-r^2$ とおくと，$f(y)$ の軸は　$y=\dfrac{1}{2}>0$

$f(0)=1-r^2>0$　より　$(r+1)(r-1)<0$　　よって　$-1<r<1$

①の判別式 $D>0$　より　$1-4(1-r^2)>0$　$r^2>\dfrac{3}{4}$

よって　$r<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<r$

したがって　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}<r<1}$ ……ア

このとき，$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ とすると，α^2，β^2 は①の２解より解と係数の関係から

$\alpha^2+\beta^2=1$ ……②，$\alpha^2\beta^2=1-r^2$ ……③

$\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ より

$(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$　　$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2=\dfrac{5}{4}$

②より　$1-2\alpha\beta+1^2-4\alpha^2\beta^2=\dfrac{5}{4}$

$\alpha\beta=X$ とおき X について整理すると

$16X^2+8X-3=0$　　$(4X-1)(4X+3)=0$

$X=\alpha\beta>0$ より　$X=\dfrac{1}{4}$

つまり　$\alpha\beta=\dfrac{1}{4}$，$\alpha^2\beta^2=\dfrac{1}{16}$

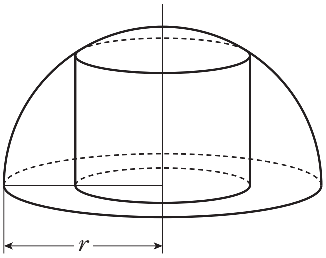
これと③より，$1-r^2=\dfrac{1}{16}$　　$r^2=\dfrac{15}{16}$

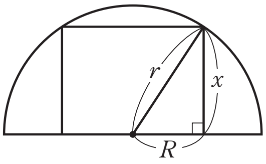
$r>0$ より　$r=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$ ……イ

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 ［2］ 図のように半径 r の半球面に円柱が内接している．円柱の体積が最大になるのは円柱の高さが **ウ** のときであり，その円柱の体積は **エ** である．





円柱の高さを x，底面の半径を R とおくと，三平方の定理より

$R^2=r^2-x^2$

円柱の体積を $V(x)$ とすると

$V(x)=\pi R^2x=\pi(r^2-x^2)x=\pi(-x^3+r^2x)$

$V'(x)=\pi(-3x^2+r^2)$

$-3x^2+r^2=0$

つまり　$x=\pm\dfrac{r}{\sqrt{3}}$ のとき $V'(x)=0$

$0<x<r$ より $V(x)$ の増減表は右図．

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{r}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(r)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗		↘	

$V\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\right)=\pi\left(r^2-\dfrac{r^2}{3}\right)\cdot\dfrac{r}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi r^3$

したがって，円柱の高さが $\boldsymbol{\dfrac{r}{\sqrt{3}}}$ …ウのとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi r^3}$ …エをとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面上に３つの放物線 $C_1：y=x^2$，$C_2：y=bx^2$ $(0<b<1)$ および C_3 がある．C_3 は C_2 上の点 $(1,\ b)$ を頂点とし，点 $(0,\ b-1)$ を通り，上に凸である．また，C_1 と C_3 は，ただ１つの共有点 A をもち，A を通る共通の接線 ℓ をもつ．

(1)　b の値と C_3 の方程式を求めよ．

(2)　A の座標と ℓ の方程式を求めよ．

(3)　C_1，ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を S とし，C_3，ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を T とする．$S=T$ が成り立つことを示せ．

(1)　C_3 の式を $y=a(x-1)^2+b$ とおくと，$(0,\ b-1)$ を通るので

$b-1=a+b$　　$a=-1$

よって　$C_3：y=-(x-1)^2+b$

$C_1：y=x^2$ より，$y'=2x$

$C_3：y=-(x-1)^2+b$ より，$y'=-2(x-1)$

C_1 と C_3 のただ１つの共有点 A の x 座標を s とすると

$2s=-2(s-1)$

よって　$s=\dfrac{1}{2}$

したがって A の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

$s^2=-(s-1)^2+b$ より，$b=s^2+(s-1)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

したがって　$\boldsymbol{b=\dfrac{1}{2}}$

$\boldsymbol{C_3：y=-(x-1)^2+\dfrac{1}{2}}$

(2)　(1)より，$\mathbf{A}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

また接線 ℓ の方程式は　$y=1\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$ より　　$\boldsymbol{y=x-\dfrac{1}{4}}$

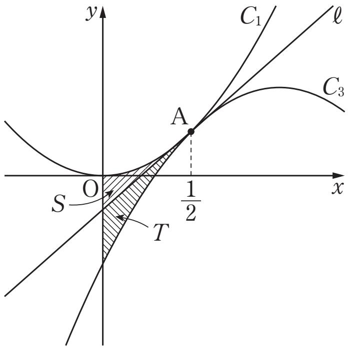
(3)　$S=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{x^2-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$

$=\left[\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=0-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{24}$

$T=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)-\left\{-(x-1)^2+\frac{1}{2}\right\}\right]dx$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{1}{24}$



したがって　$S=T$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 座標平面上に放物線 D：$y=\frac{1}{2}x^2+x+2$ と D 上の点 $\mathrm{P}(-2,\ 2)$ がある．また，P における D の接線を ℓ とする．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) 円 C は，半径が r で中心が $(r,\ 2)$ であり，直線 ℓ と接しているとする．C と ℓ との接点 A の x 座標を a とするとき，A を通り ℓ と垂直に交わる直線の方程式を a で表せ．また，その直線が C の中心を通ることを用いて r を a で表せ．

(3) (2)の r の値を求めよ．

(4) (2)の C の外側で D と C と ℓ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(1) $y=\frac{1}{2}x^2+x+2$ より $y'=x+1$

P$(-2,\ 2)$ における接線の方程式は

$y=-1(x+2)+2=-x$ 　　したがって　ℓ：$\boldsymbol{y=-x}$

(2) 点 A は ℓ 上の点より　A$(a,\ -a)$

よって点 A を通る ℓ の法線の方程式は

$y=1\cdot(x-a)-a$

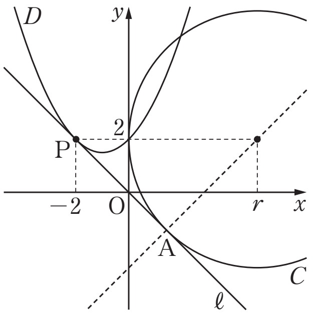
つまり　$\boldsymbol{y=x-2a}$

この直線が円 C の中心 $(r,\ 2)$ を通ることより

$2=r-2a$ 　よって　$\boldsymbol{r=2a+2}$

(3) 円 C が直線 ℓ と接するので，中心 $(r,\ 2)$ と直線 ℓ：$x+y=0$ の距離が半径 r と等しい．

よって　$\dfrac{|r+2|}{\sqrt{1+1}}=r$



ここで右図より円の中心は直線 ℓ の上側にある．

すなわち $(r,\ 2)$ が $y>-x$ つまり $x+y>0$ の領域に存在するので，

$r+2>0$

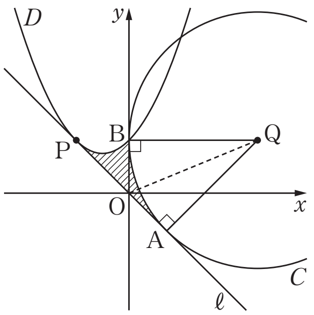
したがって

$\dfrac{r+2}{\sqrt{2}}=r$ 　　$(\sqrt{2}-1)r=2$

ゆえに　$\boldsymbol{r=}\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=2(\sqrt{2}+1)=\boldsymbol{2\sqrt{2}+2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4) (2), (3)より　$2a+2=2\sqrt{2}+2$　よって　$a=\sqrt{2}$



このとき C の中心を $\mathrm{Q}(2\sqrt{2}+2,\ 2)$，$C$ と y 軸との接点を $\mathrm{B}(0,\ 2)$ とすると，3 点 P，B，Q は直線 $y=2$ 上にある．

D，ℓ，y 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_{-2}^{0}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+x+2\right)-(-x)\right\}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x+2)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$$

$\triangle\mathrm{OAQ}\equiv\triangle\mathrm{OBQ}$ より，

四角形 $\mathrm{OBQA}=\triangle\mathrm{OBQ}\times 2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2\sqrt{2}+2)\times 2=4\sqrt{2}+4$

四角形 OBQA において，$\angle\mathrm{OAQ}=\angle\mathrm{OBQ}=90^\circ$，$\angle\mathrm{AOB}=135^\circ$　より　$\angle\mathrm{BQA}=45^\circ$

よって

扇形 $\mathrm{QBA}=\pi(2\sqrt{2}+2)^2\times\frac{45^\circ}{360^\circ}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi$

したがって求める面積 S は，

$$S=\frac{4}{3}+(4\sqrt{2}+4)-\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi=\boldsymbol{\frac{16+12\sqrt{2}}{3}-\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　数列，ベクトル

[1] [1]　2 つの自然数 m，n が $m<n$ を満たすとき，m から n までのすべての自然数の和 S を m と n で表すと $S=$ ［ア］ である．このとき，$S=808$ となる m と n の組は $(m,\ n)=$ ［イ］ である．

求める和 S は，初項 m，末項 n，項数 $n-m+1$ の等差数列の和である．

よって　$S=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(n-m+1)(m+n)}$　……ア

また，$S=808$ のとき

$$\frac{1}{2}(n-m+1)(m+n)=808$$

$$(n-m+1)(n+m)=1616=2^4\times 101$$

$n-m$ と $n+m$ は偶奇を共にするので，$n-m+1$ と $n+m$ は偶奇を異にする．

また $m\geqq 1$ より，$(n+m)-(n-m+1)=2m-1>0$　よって　$n+m>n-m+1$

さらに $m<n$ かつ m，n は自然数より　$n-m\geqq 1$　つまり　$n-m+1\geqq 2$

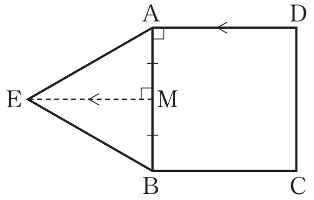
したがって　$n-m+1=2^4$，$n+m=101$ より　$(m,\ n)=\boldsymbol{(43,\ 58)}$　……イ

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 [2]　平面上に正方形 ABCD と点 E がある．ただし，E は正方形 ABCD の外部にあり，EA＝EB＝AB を満たす．また，AB と EC の交点を F とする．$\overrightarrow{EA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{EB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{EF}$ それぞれを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表すと，$\overrightarrow{AD}=$ **ウ**，$\overrightarrow{EF}=$ **エ** である．

線分 AB の中点を M とすると



$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

また，△EAB は正三角形より　EM⊥AB

これと AB⊥AD より　AD∥EM

$$EM=\frac{\sqrt{3}}{2}EA=\frac{\sqrt{3}}{2}AD$$

つまり　$AD=\frac{2}{\sqrt{3}}EM$

したがって

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{EM}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{b}}\quad\cdots\cdots ウ$$

$$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\vec{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}+\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\vec{b}$$

$\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{EC}=\frac{1}{\sqrt{3}}k\vec{a}+\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}k\vec{b}$ (k は実数) とおくと，点 F は線分 AB 上の点より

$$\frac{1}{\sqrt{3}}k+\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}k=1$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}k=1$$

$$k=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$$

したがって　$\overrightarrow{EF}=(2-\sqrt{3})\vec{a}+(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\vec{b}=\boldsymbol{(2-\sqrt{3})\vec{a}+(\sqrt{3}-1)\vec{b}}$　……エ

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　初項が2である数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の初項から第 n 項までの和 S_n について，$S_{n+1}-2S_n=n^2-n+2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立っている．

(1)　S_2 を求めよ．

(2)　$n\geqq 2$ であるとき，S_n-2S_{n-1} を n の式で表せ．

(3)　$a_{n+1}-2a_n$ を n の式で表せ．

(4)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_{n+1}-2S_n=n^2-n+2$　……①　より　$S_2-2S_1=1^2-1+2=2$

$a_1=2$　より　$S_1=2$

よって　$S_2-4=2$　より　$\boldsymbol{S_2=6}$

(2)　$n\geqq 2$ のとき　$\boldsymbol{S_n-2S_{n-1}}=(n-1)^2-(n-1)+2=\boldsymbol{n^2-3n+4}$　……②

(3)　$n\geqq 2$ のとき　①－②より

$(S_{n+1}-S_n)-2(S_n-S_{n-1})=2n-2$

つまり　$a_{n+1}-2a_n=2n-2$　……③

ここで　$S_2=6$ より　$a_1+a_2=6$

$a_1=2$　より　$a_2=4$

よって　$a_2-2a_1=4-2\cdot 2=0$

③で $n=1$ のとき　$a_2-2a_1=2\cdot 1-2=0$

よって③は $n=1$ のときも成立する．

したがって　$\boldsymbol{a_{n+1}-2a_n=2n-2}$

(4)　$a_{n+1}=2a_n+2n-2$　……④

より

$a_{n+2}=2a_{n+1}+2(n+1)-2$　……⑤

⑤－④より

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+2$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと

$b_{n+1}=2b_n+2,\ b_1=a_2-a_1=2$

よって　$b_{n+1}+2=2(b_n+2),\ b_1+2=4$　より

$b_n+2=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$

したがって　$b_n=2^{n+1}-2$

つまり　$a_{n+1}-a_n=2^{n+1}-2$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1}-2)=2+\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}-2(n-1)=2^{n+1}-2n$

この式は $n=1$ のときも成立する

ゆえに　$\boldsymbol{a_n=2^{n+1}-2n}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(別解)　④が $a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(a_n+\alpha n+\beta)$　……⑥　と変形できるとすると，この式を変形して

$a_{n+1}=2a_n+\alpha n+(-\alpha+\beta)$

これを④と比較して

$\alpha=2,\ -\alpha+\beta=-2$

つまり

$\alpha=2,\ \beta=0$

よって④は　$a_{n+1}+2(n+1)=2(a_n+2n)$　と変形できる．

ここで　$a_n+2n=c_n$　とおくと

$c_{n+1}=2c_n,\ c_1=a_1+2\cdot1=4$

したがって　$c_n=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$　つまり　$a_n+2n=2^{n+1}$

ゆえに　$\boldsymbol{a_n=2^{n+1}-2n}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 Oを原点とする座標空間に四面体OABCがある．3点A，B，Cの座標は $A(\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$B(0,\ \sqrt{3},\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 2)$ である．また，A，B，Cを通る平面上に点Pがあり，実数 s，t に対して，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす．

(1) Pの座標を s，t で表せ．

(2) $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AC}$ のとき，s，t を求めよ．

(3) △ABCの面積を求めよ．

(4) (2)のとき，直線APと直線BCの交点をHとする．$|\overrightarrow{AH}|$ を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$　より　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OA}=(\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{2},\ 0,\ 2)$ より

$\overrightarrow{OP}=(\sqrt{2},\ 0,\ 0)+s(-\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 0)+t(-\sqrt{2},\ 0,\ 2)$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{2}s-\sqrt{2}t,\ \sqrt{3}s,\ 2t)$

したがってPの座標は　$\boldsymbol{(\sqrt{2}-\sqrt{2}s-\sqrt{2}t,\ \sqrt{3}s,\ 2t)}$

(2) $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AB}$ より　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$(-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{2}s-\sqrt{2}t)+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}s+0\cdot 2t=0$

$5s+2t=2$　……①

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AC}$ より　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$(-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{2}s-\sqrt{2}t)+0\cdot\sqrt{3}s+2\cdot 2t=0$

$s+3t=1$　……②

①，②より　$\boldsymbol{s=\dfrac{4}{13},\ t=\dfrac{3}{13}}$

(別解)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=-2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$

$|\overrightarrow{AB}|^2=2+3=5$　　$|\overrightarrow{AC}|^2=2+4=6$

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AB}$ より　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

よって　$-2+5s+2t=0$　……①

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AC}$ より　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2=0$

よって　$-2+2s+6t=0$　……②

①，②より　$\boldsymbol{s=\dfrac{4}{13},\ t=\dfrac{3}{13}}$

(3) $\triangle\mathbf{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\times 6-2^2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{26}}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)　(2)のとき

$$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{13}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{13}\overrightarrow{AC}=\frac{7}{13}\left(\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\right)$$

$\overrightarrow{AH'}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$ とおくと H′ は直線（線分）BC 上の点

また，$\overrightarrow{AP}=\frac{7}{13}\overrightarrow{AH'}$　より　H′ は直線 AP 上の点

よって H′ は直線 AP と直線 BC の交点より，H′ は H と一致する．

したがって　$\overrightarrow{AH}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{7}(4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC})$　より

$$|\overrightarrow{AH}|^2=\left(\frac{1}{7}\right)^2|4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}|^2=\frac{1}{49}(16|\overrightarrow{AB}|^2+24\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+9|\overrightarrow{AC}|^2)$$

$$=\frac{1}{49}(16\times5+24\times2+9\times6)=\frac{182}{49}$$

ゆえに　$\boldsymbol{|\overrightarrow{AH}|=\frac{\sqrt{182}}{7}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法・積分法（数学Ⅲ），複素数平面

1 ［1］　関数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ を微分すると，$f'(x)=$ ア であり，$f(x)=-f'(x)$ を満たす x の値は イ である．

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$　より

$$f'(x)=\frac{x'\cdot\sqrt{x-1}-x\cdot(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x-1})^2}=\frac{\sqrt{x-1}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1}{x-1}$$

$$=\frac{2(x-1)-x}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}}\quad\cdots\cdots ア$$

$f(x)=-f'(x)$　より

$$\frac{x}{\sqrt{x-1}}=-\frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$2x(x-1)=-x+2$$

$$2x^2-x-2=0$$

よって，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

$x-1>0$　より，

$$\boldsymbol{x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}}\quad\cdots\cdots イ$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 [2]　曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ e^t)$ における接線 ℓ と法線 m が x 軸と交わる点をそれぞれ B, C とする．法線 m の方程式は **ウ** であり，△ABC の面積が 5 のとき，△ABC の外心の座標は **エ** である．

$y=e^x$　より　$y'=e^x$

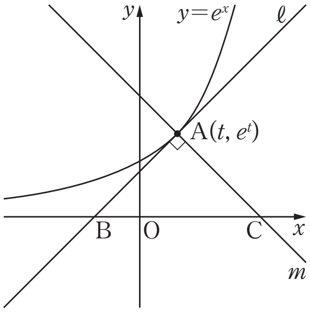
この曲線上の点を $\mathrm{A}(t,\ e^t)$ とすると，点 A における接線 ℓ の方程式は

$y=e^t(x-t)+e^t$

この接線と x 軸との交点の x 座標は

$0=e^t(x-t)+e^t$　　$(x-t)+1=0$　　$x=t-1$

したがって　$\mathrm{B}(t-1,\ 0)$



また，点 A における法線 m の方程式は

$y=-\dfrac{1}{e^t}(x-t)+e^t$　つまり

$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{e^t}x+\dfrac{t}{e^t}+e^t}$　……ウ

この法線と x 軸との交点の x 座標は

$0=-\dfrac{1}{e^t}(x-t)+e^t$　　$x-t=(e^t)^2$　　$x=e^{2t}+t$

したがって　$\mathrm{C}(e^{2t}+t,\ 0)$

△ABC の面積が 5 のとき

$\dfrac{1}{2}\cdot\{(e^{2t}+t)-(t-1)\}\cdot e^t=5$

$(e^t)^3+e^t-10=0$

$(e^t-2)(e^{2t}+2e^t+5)=0$

よって　$e^t=2$　より　$t=\log 2$

したがって　$\mathrm{B}(\log 2-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(\log 2+4,\ 0)$

$\angle \mathrm{BAC}=90^\circ$ より △ABC の外心は辺 BC の中点

よって外心の x 座標は　$\dfrac{(\log 2-1)+(\log 2+4)}{2}=\dfrac{2\log 2+3}{2}$

したがって外心の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{2\log 2+3}{2},\ 0\right)}$　……エ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 [3]　複素数 z は $z=\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi$ であるとする．$z^7=$ オ であり，

$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z=$ カ である．

$$z^7=\left(\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi\right)^7=\cos\left(\frac{2}{7}\pi\times7\right)+i\sin\left(\frac{2}{7}\pi\times7\right)$$

$$=\cos2\pi+i\sin2\pi=\mathbf{1}\quad\cdots\cdots オ$$

よって　$z^7-1=0$　より

$$(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$

$z\neq1$ より

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

したがって

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z=\mathbf{-1}\quad\cdots\cdots カ$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 正の実数 k について，関数 $f(x)=e^{-kx}+x$ がある．$f'(x)=0$ を満たす x は k の関数であり，この関数を $g(k)$ とする．

(1) $g(k)$ を求めよ．

(2) $g(k)$ の最大値 x_0 と，そのときの k の値 k_0 を求めよ．

(3) $k=k_0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=x_0$，$x=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $f'(x)=-ke^{-kx}+1=0$ より $e^{-kx}=\dfrac{1}{k}$

よって $kx=\log k$ より $x=\dfrac{\log k}{k}$

したがって $\boldsymbol{g(k)=\dfrac{\log k}{k}}$

(2) $g'(k)=\dfrac{\dfrac{1}{k}\cdot k-\log k}{k^2}=\dfrac{1-\log k}{k^2}$

よって $g(k)$ の増減表は右図．

k	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$g'(k)$		$+$	0	$-$
$g(k)$		↗		↘

したがって $g(k)$ は $k=e$ のとき最大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる．

ゆえに $\boldsymbol{x_0=\dfrac{1}{e}，k_0=e}$

(3) $k=k_0=e$ のとき $f(x)=e^{-ex}+x$

ここで $f''(x)=e^2e^{-ex}>0$ より $f''(x_0)>0$

したがって

$x<x_0$ のとき，$f'(x)<0$

$x>x_0$ のとき，$f'(x)>0$ 　つまり $f(x_0)$ は極小かつ最小

$$f(x_0)=e^{-e\times\frac{1}{e}}+\frac{1}{e}=\frac{2}{e}>0$$

よって，つねに $f(x)>0$

したがって

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(e^{-ex}+x)dx=\left[-\frac{1}{e}e^{-ex}+\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$=-\frac{1}{e}\cdot e^{-e}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{e}\cdot e^{-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^2}\right)$$

$$=-e^{-e-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^2}-\frac{1}{2e^2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{1}{2e^2}-e^{-e-1}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［2］ 関数 $f(x)=x\sin\frac{\pi}{6}x-\frac{1}{2}$ を考える．

(1) $f(1)$ を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(0)$ を計算せよ．

(3) $0<x\leqq 3$ のとき，$f'(x)>0$ が成り立つことを示せ．

(4) 曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x<3)$ と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(1) $f(1)=\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\mathbf{0}$

(2) $f'(x)=1\cdot\sin\frac{\pi}{6}x+x\cdot\cos\frac{\pi}{6}x\cdot\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\sin\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}x\cos\frac{\pi}{6}x}$

よって　$f'(0)=\mathbf{0}$

(3) $0<x\leqq 3$ のとき　$0<\frac{\pi}{6}x\leqq\frac{\pi}{2}$

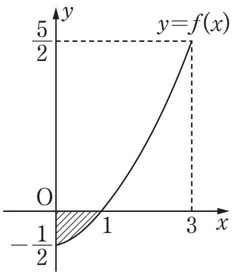
よって　$\sin\frac{\pi}{6}x>0$，$\cos\frac{\pi}{6}x\geqq 0$ より　$f'(x)>0$

(4) (3)より $0<x<3$ において $f(x)$ は単調増加

また，$f(0)=-\frac{1}{2}$，$f(3)=\frac{5}{2}$

(1)より $f(1)=0$，(2)より $f'(0)=0$

したがって，$0\leqq x<3$ における $y=f(x)$ のグラフの概形は右図．



よって求める面積 S は

$$S=\int_0^1\{-f(x)\}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\sin\frac{\pi}{6}x\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}-\int_0^1 x\sin\frac{\pi}{6}x\,dx$$

ここで　$\int x\sin\frac{\pi}{6}x\,dx=x\cdot\left(-\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi}{6}x\right)-\int 1\cdot\left(-\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi}{6}x\right)dx$

$$=-\frac{6}{\pi}x\cos\frac{\pi}{6}x+\left(\frac{6}{\pi}\right)^2\sin\frac{\pi}{6}x+C$$

より

$$\int_0^1 x\sin\frac{\pi}{6}x\,dx=-\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi}{6}+\left(\frac{6}{\pi}\right)^2\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}+\frac{18}{\pi^2}$$

したがって

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{\pi}-\frac{18}{\pi^2}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

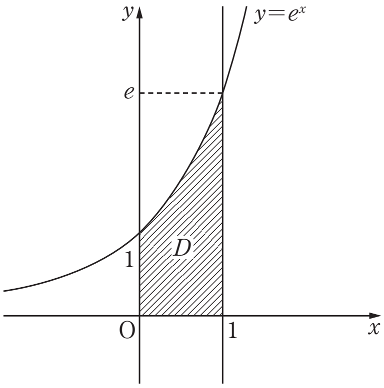
3　座標平面で，曲線 $y=e^x$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=1$ とで囲まれた部分を D とする．

(1)　D を座標平面に図示せよ．

(2)　D を x 軸のまわりに１回転させてできる回転体の体積 V_0 を求めよ．

(3)　D を直線 $y=1$ のまわりに１回転させてできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

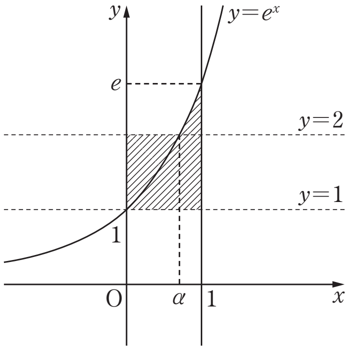
(1)



上図斜線部分（境界含む）

(2)　$V_0=\int_0^1 \pi y^2\,dx=\pi\int_0^1 e^{2x}\,dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(e^2-1)}$

(3)　D の $y=1$ より下の部分を $y=1$ に関して対称に折り返すと，右図の斜線部分となる．求める体積は，右図斜線部分を $y=1$ のまわりに１回転させてできる図形の体積である．



$y=e^x$ と $y=2$ の交点の x 座標は $e^x=2$ より $x=\log 2$

これを α とすると，$e^{\alpha}=2$　……①

$$V_1=\pi\cdot 1^2\cdot\alpha+\pi\int_{\alpha}^{1}(y-1)^2\,dx$$

$$\frac{V_1}{\pi}=\alpha+\int_{\alpha}^{1}(e^x-1)^2\,dx=\alpha+\int_{\alpha}^{1}(e^{2x}-2e^x+1)\,dx$$

$$=\alpha+\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+x\right]_{\alpha}^{1}$$

$$=\alpha+\left(\frac{1}{2}e^2-2e+1\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2\alpha}-2e^{\alpha}+\alpha\right)=\frac{1}{2}e^2-2e+1-\frac{1}{2}e^{2\alpha}+2e^{\alpha}$$

ここで①より　$e^{2\alpha}=2^2=4$

よって

$$\frac{V_1}{\pi}=\frac{1}{2}e^2-2e+1-\frac{1}{2}\cdot 4+2\cdot 2=\frac{1}{2}e^2-2e+3$$

したがって，$\boldsymbol{V_1=\left(\frac{1}{2}e^2-2e+3\right)\pi}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

練習問題解答

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　全学統一入試

[1]　a は実数とする．x の方程式 $x^3+x^2+ax-a-2=0$ は a の値によらない実数解をもち，その実数解は $x=$ **ア** である．また，この方程式が虚部が 2 の虚数解をもつとき，a の値を求めると $a=$ **イ** である．

[2]　曲線 $C:y=x^3-3x$ に対し，点 A$(3,\ a)$ から 3 本の接線が引けるとき，a の値の範囲は $-$ **ウ** $<a<$ **エオ** である．

[3]　座標平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(2,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ がある．AB を $t:(1-t)$ に内分する点を C，AB を $(1-t):t$ に内分する点を D とする．ただし，$0<t<\frac{1}{2}$ である．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を成分で表すと $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=($ **カ** t，**キ** $-t)$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=($ **ク** $t-2$，$1-$ **ケ** $t)$ である．△OCD が直角三角形になるとき $t=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ のとき，$t=\dfrac{9-\sqrt{\boxed{シス}}}{15}$ である．

解答例

[1]　$x^3+x^2+ax-a-2=0$　より　$(x-1)\{x^2+2x+(a+2)\}=0$

よって a の値に関わらず実数解 $x=\mathbf{1}$ をもつ．

またこの方程式が虚部が 2 の虚数解をもつとき，

方程式 $x^2+2x+(a+2)=0$ が 2 つの異なる虚数解 $m\pm 2i$ (m は実数) をもつ．

よって解と係数の関係より　$(m+2i)+(m-2i)=-2$，$(m+2i)(m-2i)=a+2$

したがって，$2m=-2$，$m^2+4=a+2$　より　$m=-1$，$a=\mathbf{3}$

[2]　$y=x^3-3x$より　$y'=3x^2-3$

よって曲線 C 上の点$(t,\ t^3-3t)$における接線の方程式は

$y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t=(3t^2-3)x-2t^3$

この接線が A$(3,\ a)$ を通るとき　$a=(3t^2-3)\cdot 3-2t^3$

つまり　$-2t^3+9t^2-9=a$　…①

点 A から曲線 C に 3 本の接線が引けるのは，t の方程式①が異なる 3 つの実数解をもつときであり，それは $f(t)=-2t^3+9t^2-9$　と　$y=a$ のグラフの共有点の個数が 3 個のときである．

$f'(t)=-6t^2+18t=-6t(t-3)$

$f(t)$の増減表は右図．

t	…	0	…	3	…
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	-9	↗	18	↘

したがって，求める a の値の範囲は　$\mathbf{-9<a<18}$

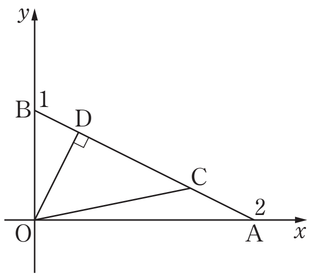
[3]　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-t)(2,\ 0)+t(0,\ 1)=(2-2t,\ t)$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t(2,\ 0)+(1-t)(0,\ 1)=(\mathbf{2}t,\ \mathbf{1}-t)$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=(4t-2,\ 1-2t)$



△OCD が直角三角形になるのは，右図より OD⊥CD のとき

つまり $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ より　$2t(4t-2)+(1-t)(1-2t)=0$

$10t^2-7t+1=0$

$(5t-1)(2t-1)=0$

$0<t<\dfrac{1}{2}$ より　$t=\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

$|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{CD}|$　のとき　$|\overrightarrow{OD}|^2=|\overrightarrow{CD}|^2$　より

$(2t)^2+(1-t)^2=(4t-2)^2+(1-2t)^2$

$15t^2-18t+4=0$

$t=\dfrac{9\pm\sqrt{21}}{15}$

$0<t<\dfrac{1}{2}$ より　$t=\mathbf{\dfrac{9-\sqrt{21}}{15}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　小問集合

[1]　a を実数の定数とし，２つの関数 $f(x)=x^2-(a-2)x+2$，$g(x)=-x^2+2x+a-2$ がある．すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$ が成り立つような a の値の範囲は
$-$[ア]$-$[イ]$\sqrt{[ウ]}<a<-$[ア]$+$[イ]$\sqrt{[ウ]}$ であり，すべての実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つような a の値の範囲は
$-$[エ]$\sqrt{[オ]}<a<$[エ]$\sqrt{[オ]}$ である．

[2]　θ の範囲を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．$a=\sin 2\theta$ とするとき，a を用いて $\sin\theta+\cos\theta$ を表すと $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{1+[カ]}$ である．また，$\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=4$ のとき，
$\sin\theta+\cos\theta$ の値を求めると $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{[キ]+\sqrt{[クケ]}}{4}$ である．

[3]　$\triangle$ABC において AB＝5，BC＝6，CA＝3 とするとき，$\cos B=\dfrac{[コサ]}{[シス]}$ であり，A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とすると，$\text{AH}=\dfrac{[セ]\sqrt{[ソタ]}}{[チ]}$ である．

解答例

[1]　$f(x)>g(x)$ より　$f(x)-g(x)>0$　つまり　$2x^2-ax+4-a>0$
これがすべての実数 x で成り立つのは　$a^2-4\cdot2\cdot(4-a)<0$
$a^2+8a-32<0$
よって　$\mathbf{-4-4\sqrt{3}}<a<-4+4\sqrt{3}$　のとき
また，すべての実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つのは
($f(x)$の最小値)＞($g(x)$の最大値)　のとき
$f(x)=\left(x-\dfrac{a-2}{2}\right)^2-\dfrac{(a-2)^2}{4}+2$　より　$f(x)$の最小値は　$-\dfrac{(a-2)^2}{4}+2$
$g(x)=-(x-1)^2+a-1$　より　$g(x)$の最大値は　$a-1$
よって　$-\dfrac{(a-2)^2}{4}+2>a-1$　　$a^2<8$
よって　$\mathbf{-2\sqrt{2}}<a<2\sqrt{2}$

[2]　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+\sin 2\theta=1+a$　であり
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　より　$\sin\theta+\cos\theta>0$
よって　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{1+\boldsymbol{a}}$
$\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=4$　より　$\sin\theta+\cos\theta=4\sin\theta\cos\theta$
つまり

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\sqrt{1+a}=2a$

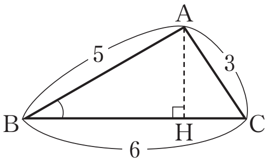
$1+a=4a^2$ （$a>0$ より）

$4a^2-a-1=0$

$a=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}$

$a>0$　より　$\sin\theta+\cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}}$

［3］　△ABC について，余弦定理より



$\cos B=\dfrac{5^2+6^2-3^2}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{52}{2\cdot5\cdot6}=\boldsymbol{\dfrac{13}{15}}$

また，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\dfrac{13^2}{15^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{15^2-13^2}}{15}=\dfrac{\sqrt{28\cdot2}}{15}=\dfrac{2\sqrt{14}}{15}$

であることより

$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\sin B=5\times\dfrac{2\sqrt{14}}{15}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{14}}{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

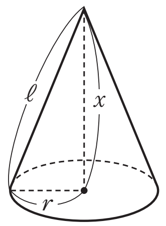
第３講　図形と方程式，微分法・積分法

[1]　展開図が円と半径 ℓ の扇形からなる直円錐を考える．ℓ が一定のとき，この円錐の体積を最大にするような円錐の高さを ℓ で表すと $\dfrac{\ell}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}$ であり，扇形の中心角は $120\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ 度である．

[2]　座標平面上に曲線 $C: y=-x^2+1$ と点 $\mathrm{P}(a,\ 3a^2+1)$ がある．ただし，$a>0$ とする．P を通る C の 2 本の接線のうち，C との接点の x 座標が小さい方を ℓ_1 とし，C と ℓ_1 の接点を Q とする．また，ℓ_1 と Q で垂直に交わる直線を ℓ_2 とする．C と ℓ_1 と直線 $x=a$ で囲まれる部分の面積を S_1，C と ℓ_2 と直線 $x=a$ で囲まれる部分の面積を S_2 とするとき，$S_2=2S_1$ が成り立つ a の値は $a=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

解答例

[1]　直円錐の底面の半径を r，高さを x とすると，$r=\sqrt{\ell^2-x^2}$



よって，この円錐の体積を $V(x)$ とすると

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi r^2x=\frac{\pi}{3}(\ell^2-x^2)x=\frac{\pi}{3}(-x^3+\ell^2x)$$

$$V'(x)=\frac{\pi}{3}(-3x^2+\ell^2)$$

$x=\pm\dfrac{\ell}{\sqrt{3}}$ のとき　$V'(x)=0$

$0<x<\ell$ より，$V(x)$ の増減表は右図．

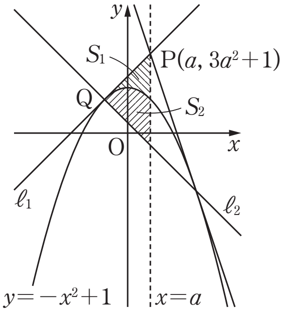
x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\ell}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(ℓ)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	最大	↘	

よって，体積を最大にするような高さは $x=\dfrac{\ell}{\sqrt{\mathbf{3}}}$

このとき $r=\sqrt{\ell^2-\dfrac{\ell^2}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ell$ であり，扇形の中心角を θ 度とすると

$$\theta=360\times\frac{r}{\ell}=360\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=120\sqrt{\mathbf{6}}\ (\text{度})$$

[2]　$C: y=-x^2+1$　より　$y'=-2x$



C 上の点 $(t,\ -t^2+1)$ における接線の方程式は

$y=-2t(x-t)-t^2+1$　つまり　$y=-2tx+t^2+1$

この接線が $\mathrm{P}(a,\ 3a^2+1)$ を通るとき

$3a^2+1=-2ta+t^2+1$

$t^2-2at-3a^2=0$

$(t-3a)(t+a)=0$

よって　$t=3a,\ -a$

$a>0$ より　接点の x 座標が小さいのは　$t=-a$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

したがって，ℓ_1：$y=2ax+a^2+1$

$$S_1=\int_{-a}^{a}\{(2ax+a^2+1)-(-x^2+1)\}dx=\int_{-a}^{a}(x^2+2ax+a^2)dx$$

$$=\int_{-a}^{a}(x+a)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+a)^3\right]_{-a}^{a}=\frac{1}{3}(2a)^3=\frac{8}{3}a^3$$

また，ℓ_2：$y=-\frac{1}{2a}(x+a)-a^2+1=-\frac{1}{2a}x-a^2+\frac{1}{2}$

$x=a$ のとき　$y=-a^2$

点 $(a,\ -a^2)$ を A とすると

$$S_2=\triangle \mathrm{APQ}-S_1$$

ここで　$\triangle \mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\times 2a\times(3a^2+1+a^2)=4a^3+a$　より

$$S_2=4a^3+a-\frac{8}{3}a^3=\frac{4}{3}a^3+a$$

よって $S_2=2S_1$ が成り立つのは

$$\frac{4}{3}a^3+a=\frac{16}{3}a^3$$

$$4a^3-a=0$$

$$a(4a^2-1)=0$$

$$a=0,\ \pm\frac{1}{2}$$

$a>0$ より　$a=\mathbf{\frac{1}{2}}$ のとき

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　数列，ベクトル

［1］　原点をOとする座標空間に3点A(1, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, 3)がある．

△ABCの面積は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．また，A，B，Cの定める平面を α とするとき，O

から α に下ろした垂線と α との交点Hの座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{49},\ \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{49},\ \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{49}\right)$ で

ある．

［2］　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2a_n+n^2-n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとする．$a_1=\boxed{\text{ケ}}$，$a_2=-\boxed{\text{コ}}$ である．また $a_{n+1}-2a_n=-\boxed{\text{サ}}\,n$ と表され，この式を変形すると

$a_{n+1}-\boxed{\text{シ}}(n+1)-\boxed{\text{ス}}=2(a_n-\boxed{\text{シ}}\,n-\boxed{\text{ス}})$ となる．

$b_n=a_n-\boxed{\text{シ}}\,n-\boxed{\text{ス}}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\boxed{\text{セソ}}$，公比2の等比数列となる．したがって，$a_n=\boxed{\text{シ}}\,n-\boxed{\text{ス}}-2^{n+\boxed{\text{タ}}}$ と表される．

解答例

［1］　$\overrightarrow{\text{AB}}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\text{AC}}=(-1,\ 0,\ 3)$ より　$|\overrightarrow{\text{AB}}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\text{AC}}|=\sqrt{10}$，$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=1$

よって

$$\triangle\text{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\text{AB}}|^2|\overrightarrow{\text{AC}}|^2-(\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot10-1}=\mathbf{\frac{7}{2}}$$

$\overrightarrow{\text{AH}}=s\overrightarrow{\text{AB}}+t\overrightarrow{\text{AC}}$ (s，t は実数) とおくと

$\overrightarrow{\text{OH}}=\overrightarrow{\text{OA}}+s\overrightarrow{\text{AB}}+t\overrightarrow{\text{AC}}=(1,\ 0,\ 0)+s(-1,\ 2,\ 0)+t(-1,\ 0,\ 3)=(1-s-t,\ 2s,\ 3t)$

$\overrightarrow{\text{OH}}\perp\alpha$ より　$\overrightarrow{\text{OH}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=0$　かつ　$\overrightarrow{\text{OH}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=0$

$\overrightarrow{\text{OH}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=-(1-s-t)+4s=0$　より　$5s+t=1$

$\overrightarrow{\text{OH}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=-(1-s-t)+9t=0$　より　$s+10t=1$

よって　$s=\dfrac{9}{49}$，$t=\dfrac{4}{49}$

したがって　$\overrightarrow{\text{OH}}=\left(1-\dfrac{9}{49}-\dfrac{4}{49},\ \dfrac{18}{49},\ \dfrac{12}{49}\right)$　より　$\text{H}\left(\mathbf{\dfrac{36}{49}},\ \mathbf{\dfrac{18}{49}},\ \mathbf{\dfrac{12}{49}}\right)$

［2］　$S_n=2a_n+n^2-n$　…①において $n=1$ のとき　$S_1=2a_1$

つまり　$a_1=2a_1$　より　$a_1=\mathbf{0}$

①で $n=2$ のとき　$S_2=2a_2+2$

つまり　$a_1+a_2=2a_2+2$

$a_1=0$　より　$a_2=\mathbf{-2}$

①より　$S_{n+1}=2a_{n+1}+(n+1)^2-(n+1)$　…②

②－①より

$S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2a_n+(2n+1)-1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$　より

　$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n+2n$

よって　$a_{n+1}-2a_n=-\mathbf{2}n$　…③

③が $a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(a_n+\alpha n+\beta)$　…④　と変形できるとき

　$a_{n+1}=2a_n+\alpha n+(-\alpha+\beta)$

これを③と比較して $\alpha=-2$，$-\alpha+\beta=0$　　$\alpha=-2$，$\beta=-2$

よって④より

　$a_{n+1}-\mathbf{2}(n+1)-\mathbf{2}=2(a_n-2n-2)$

ここで，$b_n=a_n-2n-2$　とおくと　$b_{n+1}=2b_n$，$b_1=a_1-2-2=-4$　より

数列 $\{b_n\}$ は初項 $\mathbf{-4}$，公比 2 の等比数列である．

よって　$b_n=-4\cdot2^{n-1}=-2^{n+1}$

つまり　$a_n-2n-2=-2^{n+1}$　より

　$a_n=2n+2-2^{n+1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法・積分法(数学Ⅲ)，複素数平面

[1]　関数 $f(x)=(\log x)^2-\log\left(\frac{1}{x}\right)^2$ を微分すると，$f'(x)=\frac{\boxed{ア}}{x}(\log x+\boxed{イ})$ であり，$f(x)-xf'(x)=0$ を満たす x の値は $x=e^{\pm\sqrt{\boxed{ウ}}}$ である．

[2]　複素数 $z=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$ について，$z^5=\boxed{エ}$，$z^4+z^3+z^2+z+1=\boxed{オ}$ である．

[3]　a を実数として，関数 $f(x)=a\cos x-\frac{\cos x}{1+\sin x}\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ を考える．

(1)　$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$ となる a の値は $a=\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である．また，このとき

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{\boxed{ク}}}{3}$ である．

(2)　a の値を(1)のように定めるとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 S は $S=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}-\log\boxed{サ}$ である．

解答例

[1]　$f(x)=(\log x)^2-\log x^{-2}$　より

$$f'(x)=2(\log x)\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{-2}}\cdot(-2x^{-3})$$

$$=\frac{2}{x}\log x+\frac{2}{x}=\frac{\mathbf{2}}{x}(\log x+\mathbf{1})$$

$f(x)-xf'(x)=0$　より　$(\log x)^2-\log x^{-2}-2(\log x+1)=0$

$(\log x)^2+2\log x-2\log x-2=0$

$(\log x)^2=2$

$\log x=\pm\sqrt{2}$

よって　$x=e^{\pm\sqrt{2}}$

[2]　$z=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$　より

$$z^5=\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)^5$$

$$=\cos\left(\frac{2}{5}\pi\times5\right)+i\sin\left(\frac{2}{5}\pi\times5\right)$$

$$=\cos2\pi+i\sin2\pi=\mathbf{1}$$

$z^5=1$　より

$z^5-1=0$

$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$z\neq 1$　より

$z^4+z^3+z^2+z+1=\mathbf{0}$

［3］(1)　$f(x)=a\cos x-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$　より

$$f'(x)=-a\sin x-\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=-a\sin x+\frac{1+\sin x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=-a\sin x+\frac{1}{1+\sin x}$$

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$　より　$-a\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=0$　　よって　$a=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$

このとき　$f(x)=\dfrac{4}{3}\cos x-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$　より

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{1+\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(2)　$f'(x)=-\dfrac{4}{3}\sin x+\dfrac{1}{1+\sin x}$

$$=\frac{-4\sin x(1+\sin x)+3}{3(1+\sin x)}$$

$$=-\frac{(2\sin x+3)(2\sin x-1)}{3(1+\sin x)}$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における増減表は右図.

x	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		＋	0	－	
$f(x)$		↗		↘	

$f(0)=\dfrac{1}{3}>0$,　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

よって求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{3}\cos x-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{4}{3}\cos x-\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}\right\}dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}\sin x-\log(1+\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{\frac{4}{3}-\log 2}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。